

روش‌های حل انتگرال

گاهی می‌توان انتگرال را به روش‌های مختلفی حل کرد. در مثال‌های زیر، روش‌های مختلفی را برای حل انتگرال‌ها نشان می‌دهیم. روش‌های مختلفی برای حل انتگرال‌ها وجود دارد و انتخاب روش مناسب بستگی به شکل انتگرال دارد.

معمده‌ی برخی برای انتگرال‌گیری

فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته در بازه I باشد. اگر $u = g(x)$ را انتخاب کنیم، داریم:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{dx^r}{(1-rx^r)^r}$ را حساب کنید.

$$\int \frac{dx^r}{(1-rx^r)^r} dx = \int \frac{x^r}{(1-rx^r)^r} dx$$

$$= \frac{\Delta}{-1r} \int \frac{\underbrace{-1rx^r}_{u}}{(1-rx^r)^r} dx = -\frac{\Delta}{1r} \int \frac{du}{u^r} = -\frac{\Delta}{1r} \int u^{-r} du$$

$$\left(1-rx^r = u \right. \\ \left. \xrightarrow{\text{فاضل مشتق}} \frac{-r}{1r} \right)$$

$$(1-rx^r)' = u' \rightarrow -1rx^r dx = du$$

$$-\frac{\Delta}{1r} \left(\frac{u^{-r+1}}{-r+1} \right) + C = -\frac{\Delta}{1r} \left(\frac{u^{-r}}{-r} \right) + C = \frac{\Delta}{r^2} \left(\frac{1}{u^r} \right) + C = \frac{\Delta}{r^2} \left(\frac{1}{(1-rx^r)^r} \right) + C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{rx^r - rx}{x^r - rx^r + 1} dx$ را حساب کنید.

$$\int \frac{rx^r - rx}{x^r - rx^r + 1} dx$$

$$rx^r - rx = u \quad \text{فاضل مشتق}$$

$$(rx^r - rx)' = u' \rightarrow (rx - r) dx = du$$

X

بین دین مرتب و استاده مضرب نه.

$$x^r - rx^{r-1} + 1 = u \rightarrow \text{از فرض مسئله}$$

$$(x^r - rx^{r-1} + 1)' = u' \rightarrow (rx^{r-1} - rx^r) dx = du$$

$$\int \frac{rx^{r-1} - rx^r}{x^r - rx^{r-1} + 1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^r - rx^{r-1} + 1| + C$$

مثال. انتگرال زیر را حل کنید $\int \sqrt{r+at} dt$

$$\int \sqrt{at+r} dt = \frac{1}{a} \int \sqrt{\frac{at+r}{a}} a dt = \frac{1}{a} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{a} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{a} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{a} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{a} (at+r)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(at+r) = u \rightarrow a dt = du$$

مثال: استعمل التعويض $u = 1 - \sqrt{x}$ لدمج التكامل $\int \frac{(1-\sqrt{x})^r}{\sqrt{x}} dx$.

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^r}{\sqrt{x}} dx = -r \int \frac{(1-\sqrt{x})^{r-1} du}{-2\sqrt{x}} = -r \int u^{r-1} du = -r \frac{u^r}{r} + C = -\frac{(1-\sqrt{x})^r}{r} + C$$

الخطوة الأولى: $1 - \sqrt{x} = u$ $\Rightarrow$ $du = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

مثال: استعمل التعويض $u = \sin x$ لدمج التكامل $\int \sin^r x \cos x dx$.

$$\int \sin^r x \cos x dx = \int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C = \frac{\sin^{r+1} x}{r+1} + C$$

الخطوة الأولى: $\sin x = u$ $\Rightarrow$ $\cos x dx = du$

الف) $\int x^r \sqrt{1-rx^r} dx$

ب) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

ج) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

د) $\int \frac{r dx}{e^x + e^{-x}}$

هـ) $\int (x+1)^r x^r + rx^{r-1} dx$

و) $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^{r+1}+1}}$

ز) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^r}}$

ح) $\int \frac{rx+r}{x^r+rx+r} dx$

ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt{r} \sqrt{x^r+rx+r}} dx$

ت) $\int \cos x \sqrt{1-\sin x} dx$

ج) $\int \cos x e^{\sin x} dx$

د) $\int \frac{re^x}{1+e^x} dx$

هـ) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad x>0$

و) $\int \frac{dx}{\sqrt{a-rx^r}}$

ز) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

مربى،